ΑΠΟΡΙΣΜΟΙ 141-145 ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΟΥΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ 146

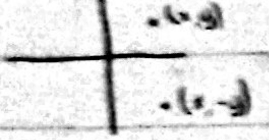
Έστω $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. Ο A λέγεται ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΣ αν $A^tA=AA^t=I_n$ (ισοδ. A αντιστρέφεται και $A^{-1}=A^t$) Από γρ. 1 A ορθογώνιος $\iff AA^t=I_n \iff A^tA=I_n$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 147 α

(i) Ο πίνακας I_n είναι ορθογώνιος

(ii) Ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$ είναι ορθογώνιος. Πράγματι, $A^t=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$ και

$AA^t=A^tA=I_2$ (γεωμετρικά αν δούμε A σαν πίνακα $\mathbb{R}^{2\times1}\to\mathbb{R}^{2\times1}$ $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}x\\-y\end{bmatrix}$



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 147 β

Το κανονικό εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^{n\times1}$ είναι η απεικόνιση $\langle\ ,\ \rangle:\mathbb{R}^{n\times1}\times\mathbb{R}^{n\times1}\to\mathbb{R}$ $\left\langle\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix},\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}\right\rangle:=a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n$. Το κανονικό εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^{1\times n}$ $\langle\ ,\ \rangle:\mathbb{R}^{1\times n}\times\mathbb{R}^{1\times n}\to\mathbb{R}$ ορίζεται από

$\langle[a_1,a_2,\dots,a_n],[b_1,b_2,\dots,b_n]\rangle=a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 148 α

Έστω $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

(i) A ορθογώνιος

(ii) Οι στήλες του A είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^{n\times1}$ με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο

(iii) Οι γραμμές του A είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^{1\times n}$ με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο.

ΑΠΟΔ. Έστω c_i η i-στήλη του A. Τότε $A=[c_1\ c_2\ \dots\ c_n]$ με $c_i\in\mathbb{R}^{n\times1}$ και $A^t=\begin{bmatrix}c_1^t\\c_2^t\\c_n^t\end{bmatrix}$ Θέτουμε $B=AA^t$ $D=A^tA$. Έστω $B=(b_{ij})$ $D=(d_{ij})$. Συμβολίζουμε r_i την i-γραμμή του A. Από τον ορισμό του πολ/σμού πινάκων έχουμε ότι $b_{ij}=\langle r_i,r_j\rangle$ και $d_{ij}=\langle c_i,c_j\rangle$. (Ο A είναι $A=\begin{bmatrix}r_1\\r_2\\\vdots\\r_n\end{bmatrix}$. $A^t=[r_1^t,\dots,r_n^t]$ και εσ. γιν. ...

(i) $\Rightarrow$ (ii) Έστω A ορθογώνιος Τότε $AA^t = A^t A = I_n$ Άρα $D = I_n \Rightarrow b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{αν } i=j \\ 0 & \text{αν } i\neq j \end{cases}$ (*) . Από παρατήρηση 120 $c_1, c_2, \dots, c_n$ λόγω της (*) γρ. ανεξ. Αφού είναι n το πλήθος και $\dim \mathbb{R}^{n\times 1} = n$ είναι λόγω της (*) ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^{n\times 1}$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Υποθέτουμε $\langle c_i, c_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{αν } i=j \\ 0 & \text{αν } i\neq j \end{cases}$. Τότε $D = I_n \Rightarrow A^t A = I_n$

Από χρ. I έπεται ότι A ορθογώνιος

(i) $\Rightarrow$ (iii) κ' (iii) $\Rightarrow$ (i) ουσιαστικά με τα ίδια επιχειρήματα αποδεικνύεται.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ 148 b

(i) Αν $x, y \in \mathbb{R}$ δεν υπάρχει $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ορθογώνια με $A = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 1 & y \end{bmatrix}$. Πράγματι, από πρόταση 148α A ορθογ $\Rightarrow$ κάθε στήλη έχει μήκος 1. Είναι $\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{2} \neq 1$.

Πιο γενικά, αν $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ορθογ. από πρόταση 148 α

(στήλες του A)
$$a_{11}^2 + a_{21}^2 + \dots + a_{n1}^2 = 1$$
$$a_{12}^2 + a_{22}^2 + \dots + a_{n2}^2 = 1$$
$$a_{1n}^2 + a_{2n}^2 + \dots + a_{nn}^2 = 1$$

(γραμμές του A)
$$a_{11}^2 + \dots + a_{1n}^2 = 1$$
$$a_{21}^2 + \dots + a_{2n}^2 = 1$$
$$a_{n1}^2 + \dots + a_{nn}^2 = 1$$

(ii) Δεν υπάρχει $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ορθογώνιος της μορφής $A = \begin{bmatrix} 1 & 1/\sqrt{2} & x \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 1/\sqrt{2} & z \end{bmatrix}$ γιατί η 1η στήλη δεν είναι κάθετη στην 2η, αφού $\langle (1,0,0), (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$

ΠΡΟΤΑΣΗ 149

Έστω $(V, \langle\ \rangle)$ Χ.Ε.Σ $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ και $T: V \to V$ γραμμική. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

(i) Η T είναι ισομετρία

(ii) Για κάθε ορθοκανονική διατεταγμένη βάση e του V ο πίνακας $[T]_e^e \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι ορθογώνιος

(iii) Υπάρχει ορθοκανονική [illegible] πίνακας $[T]_e^e$ [illegible] ορθ.

(ΑΠΟΔ. Θα το δούμε αργότερα)

ΠΡΟΤΑΣΗ 150

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ορθογώνιος, τότε $\det(A) = 1_{\mathbb{R}}$ ή $\det(A) = -1_{\mathbb{R}}$

ΑΠΟΔ. Από γρ. I ορίζουσα $\det A^t = \det A$. Άρα $AA^t = I_n \Rightarrow \det(AA^t) = \det(I_n) = 1_{\mathbb{R}} \Rightarrow (\det A)^2 = 1_{\mathbb{R}}$

ΠΡΟΤΑΣΗ 151.

Έστω $A, B, \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ορθογώνιοι. Τότε

(i) A, B ορθογώνιοι

(ii) A^{-1} ορθογώνιος

(iii) I_n ορθογώνιοι

$\Rightarrow$ Οι ορθογώνιοι πίνακες είναι ομάδα ως προς τον πολλαπλασιασμό

Αποδ. $(AB)^t (AB) = B^t A^t AB = B^t I_n B = B^t B = I_n$. Ομοίως και οι υπόλοιπες.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 152

(i) Ο $A = I_2$ είναι ορθογώνιος με $\det A = 1_{\mathbb{R}}$, ενώ ο $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ορθογ. με ορίζουσα $-1_{\mathbb{R}}$. Άρα υπάρχουν ορθογώνιοι με det 1 και με det -1

(ii) $A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ είναι ορθογώνιος. Έχουμε $X_A(x) = \det(A - xI_2) =$

$$\begin{vmatrix} (1/\sqrt{2}) - x & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & (1/\sqrt{2}) - x \end{vmatrix} = x^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}x + 1$$

με διακρίνουσα $D = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 - 4 = \frac{4}{2} - 4 < 0$. Επομένως, ο A δεν είναι διαγωνίσιμος στο $\mathbb{R}$. Σαν συνέπεια, ο A δεν είναι διαγωνίσιμος (στο $\mathbb{R}$)

Αυτός ο πίνακας αντιστοιχεί σε στροφή στο επίπεδο ως προς μία γωνία.

ΠΡΟΤΑΣΗ 153 α

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ορθογώνιος. Θεωρούμε τον A σαν στοιχείο του $\mathbb{C}^{n\times n}$. Έστω $\lambda \in \mathbb{C}$ ιδιοτιμή του A. Τότε $\lambda\bar{\lambda} = 1_{\mathbb{R}}$ δηλ. αν $\lambda = a + ib$ έχουμε $a^2+b^2=$ δηλ. ο λ είναι μιγαδικός μέτρου 1. (Σαν συμπέρασμα $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda = 1_{\mathbb{R}}$ ή $-1_{\mathbb{R}}$)

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ $e^{i\varphi} = \text{συν}\varphi + i\,\text{ημ}\varphi$. για $\varphi = \pi$ $e^{i\pi} = -1$

Απόδειξη: Αφού $\lambda \in \mathbb{C}$ ιδιοτιμή του A υπάρχει $v = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ μη μηδενικό ώστε $Av = \lambda v$ ① Θέτουμε $\bar{v} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \vdots \\ \bar{z}_n \end{pmatrix}$

Τότε $Av = \lambda v \Rightarrow (Av)^- = (\lambda v)^- \Rightarrow \bar{A}\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v} \xRightarrow{A\in\mathbb{R}^{n\times n}} A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$ ②

Υπολογίζουμε το $\bar{v}^t \vec{v} = \bar{v}^t \overset{A^tA = I_n}{A^t A} v = (A\bar{v})^t (Av) = (\bar{\lambda}\bar{v})^t \lambda v =$ $(\lambda\bar{\lambda})\bar{v}^t v$ ③. Αλλά $\bar{v}^t v = (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_n)\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = (|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2)$ ④

Από ③,④ $\bar{v}^t v = \lambda\bar{\lambda}\bar{v}^t v \Rightarrow (1_{\mathbb{R}}\,\bar{\lambda}\lambda)\cdot(|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2) = 0_{\mathbb{R}}$

Αλλά $\bar{v} \neq 0 \Rightarrow |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 > 0_{\mathbb{R}}$. Αλλά $\lambda\bar{\lambda} = 1_{\mathbb{R}}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 153 b

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ορθογώνιος ώστε 1 και -1 ιδιοτιμές του A. Τότε οι ιδιόχωροι $V_A(1)$ και $V_A(-1)$ είναι ορθογώνιοι ως προς το κανονικό εσ. γινόμενο στο $\mathbb{R}^{n\times 1}$.

Αποδ: Έστω $0 \neq v \in V_A(1) \subseteq \mathbb{R}^{n\times 1}$, $0 \neq w \in V_A(-1) \subseteq \mathbb{R}^{n\times 1}$. Έχουμε $\begin{cases} Av = v \\ Aw = -w \end{cases}$

Άρα $w^t v = w^t A^t A v = (Aw)^t (Av) = -w^t v$.

Αν $w^t v \neq 0_{1\times 1}$ παίρνουμε ότι $1_{\mathbb{R}} = -1_{\mathbb{R}}$ (αντίφαση).

Άρα $w^t v = 0_{1\times 1}$ με v, w ορθογώνια

ΘΕΩΡΗΜΑ 154 (χωρίς αποδ)

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ορθογώνιος. Τότε υπάρχει $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ορθογώνιος (άρα αντιστρέψιμος) ώστε $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} B_1 & & 0 \\ & B_2 & \\ 0 & & \ddots \; B_q \end{bmatrix}$, όπου κάθε B_i είναι 1×1 ή 2×2.

- Αν B_i είναι 1×1, τότε $B_i = [1]$ ή $B_i = [-1]$.
- Αν B_i είναι 2×2, τότε υπάρχει $\varphi_i \in \mathbb{R}$ με $B_i = \begin{bmatrix} \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i \\ \sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{bmatrix}$

π.χ $A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & -1 & \\ 0 & & & \begin{matrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{matrix} \end{bmatrix}$